Utilisation de la norme p en assimilation de données et méthode de minimisation de la fonctionnelle sous-jacente.

A. BERNIGAUD, S. GRATTON, E. SIMON
Université de Toulouse, INP, IRIT, Toulouse, France,

Email : antoine.bernigaud@irit.fr

Mots Clés : Optimisation, Assimilation de données, Régularisation, Norme L_p

Biographie – Après l'obtention d'un diplôme d'ingénieur de L'ENSEEIHT (filière Informatique et Mathématiques Appliquées) allié d'un master en Performance in Software, Media and Scientific Computing, j'ai obtenu une bourse ministérielle (MESRI) pour effectuer une thèse dans le laboratoire de l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse auprès du professeur Serge GRATTON et du maître de conférence Ehouarn SIMON. Maintenant en 2^e année de thèse, mes recherches portent sur l'utilisation de la norme L_p pour effectuer de la régularisation en assimilation de données, d'un point de vue algorithmique et théorique.

Resumé :

L'assimilation de donnée vise à faire un compromis entre, d'une part, un modèle numérique provenant d'équations physiques décrivant un phénomène et, d'autre part, d'observations bruitées effectuées sur une période dite d'assimilation. Elle est particulièrement utilisée en météorologie ou en océanographie, où les variables issues de ces domaines ont une taille de l'ordre de 10^8 à 10^9. De plus, le nombre d'observations est souvent inférieur aux nombres de variables à estimer ([7]). Si la solution attendue est creuse dans une certaine base (comme dans le cas de l'étude de fronts météorologiques (voir [5, 6]), où des zones de glaces dans la mer ([2]), les erreurs numériques peuvent être atténuées grâce à une pénalisation en norme L_1 ou L_2 sur la fonctionnelle à minimiser.

La norme L_2 tend à lisser la solution, tandis que la norme L_1 promeut une solution creuse, mais empêche l'utilisation d'algorithmes de minimisation lisse pour un problème de très grande taille. Cependant les signaux intervenants en assimilation de données peuvent être "quasi-creux". Parmi les différentes méthodes proposées pour pallier ce problème, nous suggérons d'utiliser une norme L_p avec $1 < p < 2$ comme terme de régularisation. Au-delà de la volonté de faire un compromis entre les normes L_1 et L_2, nous montrons (dans [3]) que la régularisation en norme L_p peut s'interpréter statistiquement comme l'imposition pour les variables d'état de suivre une loi normale généralisée, ce qui se produit réellement pour, par exemple, la dérivée de l'épaisseur de la glace dans la mer ([2]).

Nous montrons également la pertinence de cette approche sur un exemple simple : le cas d'un signal "quasi-creux" soumis à une équation d'advection 1D, discrétisée via le schéma de Lax-Wendroff (d'ordre 2 en espace et en temps). Ce schéma présente l'avantage, sur cette équation, de nous permettre de simuler ou non de la diffusion numérique en modifiant simplement les paramètres de discrétisation. Nous jouons aussi sur les matrices de covariance des observations et du "background" afin de simuler différents contextes. Enfin, le paramètre de régularisation est choisi via le principe de Morozov : "the Morozov's discrepancy principle" ([1]).

Si l'utilisation de cette norme est justifiée dans plusieurs cas, la minimisation de la fonctionnelle régularisée reste problématique. Les expériences précédemment décrites ont montrées qu'un algorithme basé sur une descente de gradient dans un espace de Banach (issu de [4]) était plus efficace qu'une descente de gradient classique. Cet algorithme utilise notamment des opérateurs de dualité pour effectuer une recherche de pas dans le dual. À partir de cette observation nous proposons un algorithme de gradient conjugué non linéaire modifié pour d'une part effectuer pareillement

une recherche de pas dans le dual et, d'autre part, pour assurer une convergence théorique à l'algorithme. L'objectif de ces modifications est d'obtenir en peu d'itérations une solution "satisfaisante" en exploitant les propriétés de régularisation découlant de la norme L_p. Des expériences faites dans le contexte de l'équation d'advection soutiennent déjà la pertinence de cette démarche et nous espérons fournir de nouvelles preuves à la fois expérimentales et théoriques de son efficacité par la suite.

Références

[1] S.W. Anzengruber. *The discrepancy principle for Tikhonov regularization in Banach spaces.* PhD thesis, Johannes Kepler Universitat Linz, 2011.

[2] Nazanin Asadi, K. Andrea Scott, and David A. Clausi. Data fusion and data assimilation of ice thickness observations using a regularisation framework. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 2019.

[3] A. Bernigaud, S. Gratton, F. Lenti, E. Simon, and O. Sohab. Lp-norm regularization in variational data assimilation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 147:2067–2081, 2021.

[4] T. Bonesky, K.S. Kazimierski, P. Maass, F. Schöpfer, and T. Schuster. Minimization of Tikhonov functional in Banach spaces. 2008:1–18, 2007.

[5] M.A. Freitag, N. K. Nichols, and C. J. Budd. l_1 regularization for ill-posed problems in variational data assimilation. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 10:665–668, 2010.

[6] M.A. Freitag, N.K. Nichols, and C.J. Budd. Resolution of sharp fronts in the presence of model error in variational data assimilation. *Quartely journal of the royal meteorological society*, 139:742–757, 2013.

[7] M. Tonani, M. Balmaseda, L. Bertino, E. Blockley, G. Brassington, F. Davidson, Y. Drillet, P. Hogan, T. Kuragano, T. Lee, A. Mehra, F. Paranathara, C.A.S. Tanajura, and H. Wang. Status and future of global and regional prediction systems. *Journal of Operational Oceanography*, 8(S2):s201–s220, 2015.