Optimisation non-différentiable en nombres complexes appliquée au problème ACOPF dual

Antoine Oustry, C. D'Ambrosio, L. Liberti, J. Maeght, M. Ruiz
Laboratoire d'informatique de l'Ecole polytechnique (LIX), Ecole des Ponts, Réseau de transport d'électricité

Email : oustry@lix.polytechnique.fr

Mots Clés : Algèbre linéaire hermitienne, Optimisation des flux de puissance, Optimisation non-différentiable, Programmation semi-définie positive.

Biographie – Ancien élève de l'Ecole polytechnique et de l'Ecole des ponts, Antoine Oustry est doctorant au LIX sous la direction de Claudia D'Ambrosio et Leo Liberti (DR CNRS). Dans le cadre de sa thèse, financée par l'Ecole des ponts et par Réseau de transport d'électricité, il mène des travaux de recherche sur la formulation et la résolution de relaxations convexes pour le problème de l'optimisation des flux de puissance (ACOPF).

Resumé :

Le problème de l'ACOPF (Alternating-Current Optimal Power Flow) modélise l'optimisation du *dispatching* de l'électricité dans un réseau à moyenne ou haute tension. Il s'agit d'un sujet de recherche actif dans les domaines du génie électrique et de la recherche opérationnelle. En effet, l'ACOPF a de multiples applications pour le pilotage des réseaux électriques mais l'obtention de certificats d'optimalité globale pour des instances de taille réaliste reste encore un défi.

En régime permanent, les variables d'état d'un réseau électrique en courant alternatif sont des signaux sinusoïdaux, qui peuvent donc être représentés algébriquement par des variables complexes. Ainsi, le problème ACOPF est un problème d'optimisation exprimé "naturellement" en nombres complexes. Plus précisément, il peut être formulé comme un problème de programmation quadratique sous contraintes quadratiques (QCQP) avec des variables de décision complexes [1]. Le problème dual de l'ACOPF est un problème de programmation semi-définie (SDP), qui est en fait le problème SDP dual de la relaxation SDP primal, connue sous le nom de "relaxation du rang" [6]. Les relaxations SDP primales et duales de l'ACOPF sont exprimées en nombres complexes avec une matrice hermitienne $n \times n$ mais peuvent être écrites, par un argument d'isométrie, comme des problèmes SDP réels avec une matrice symétrique réelle $2n \times 2n$. La relaxation SDP du problème ACOPF est connue pour produire de très bonnes bornes inférieures [4], ce qui est un atout majeur dans la quête de certificats d'optimalité globale. Néanmoins, cette méthode ne passe pas aussi bien à l'échelle que d'autres types de relaxations coniques [5]. Afin de réduire le temps de calcul nécessaire à l'obtention de bornes SDP, le travail présenté ici propose une nouvelle approche pour résoudre la relaxation SDP de l'ACOPF et son problème dual. L'originalité de ce travail est de résoudre directement le problème dual en nombres complexes.

Dans le problème dual de l'ACOPF, le vecteur de décision $x \in \mathbb{R}^m$ est à composantes réelles, mais ce problème contient une inégalité matricielle linéaire (LMI) impliquant une matrice hermitienne $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Cela explique pourquoi cette formulation ne peut pas être résolue telle quelle par un solveur SDP standard. Contrairement aux méthodes de l'état de l'art traitant des relaxations SDP de problèmes ACOPF de grande taille [7, 8], nous procédons sans convertir le problème SDP en variables réelles, ce qui permet de conserver une LMI de taille $n \times n$. À cet égard, nous nous inscrivons dans la lignée des travaux de Gilbert et Josz [2], qui préconisent de développer des méthodes permettant de résoudre directement la formulation originale d'un problème SDP en variables complexes. Exploitant la structure de l'opérateur affine $x \mapsto \mathcal{A}(x)$, nous prouvons que le problème dual ACOPF peut être écrit comme un problème de maximisation concave non-différentiable en variables réelles et sans contraintes. La fonction objectif de la formulation que

nous proposons ici fait apparaître la valeur propre minimale de la matrice hermitienne $\mathcal{A}(x)$. À cet égard, nous nommons cette formulation le “dual hermitien spectral” du problème ACOPF. Grâce à une technique classique de complétion de matrices SDP, nous pouvons nous ramener systématiquement au cas où la matrice $\mathcal{A}(x)$ est diagonale par blocs, avec des blocs de tailles très limitées par rapport à n, la taille du problème ACOPF. Cela présente un avantage certain pour le calcul efficace des valeurs propres.

Nous proposons de résoudre ce problème de maximisation concave non-différentiable grâce à une méthode de faisceaux exploitement fortement la structure du réseau. L'utilisation des méthodes de faisceaux pour l'optimisation spectrale a déjà été largement explorée dans les cas de fonctions valeur propre maximale (ou minimale) de matrices symétriques réelles [3, 9]. À notre connaissance, ce travail est le premier à proposer une méthode de faisceaux pour l'optimisation spectrale dans le cadre hermitien. En utilisant la structure diagonale par blocs des matrices hermitiennes $\mathcal{A}(x)$, nous sommes en mesure de procéder à leur décomposition spectrale complète. Cette information est exploitée pour mettre en oeuvre une méthode de faisceaux du second ordre. Nous présentons des résultats numériques sur des instances de tailles réalistes, jusqu'à 6500 noeuds. Ces résultats sont prometteurs et démontrent l'intérêt de traiter le problème ACOPF dual *via* cette nouvelle formulation hermitienne spectrale.

D'un point de vue théorique, cette approche algorithmique pourra être poursuivie en l'étandant à la hiérarchie “Moments/Sommes de carrés” en nombres complexes ou en l'intégrant dans une méthode de résolution globale de type *branch-and-bound*. D'un point de vue pratique, notre algorithme pourra être accéléré en calculant de façon parallèle la décomposition spectrale des différents blocs.

Références

[1] Daniel Bienstock, Mauro Escobar, Claudio Gentile et Leo Liberti. *Mathematical programming formulations for the alternating current optimal power flow problem.* 4OR 18.3 (2020): 249-292.

[2] Jean-Charles Gilbert et Cedric Josz. *Plea for a semidefinite optimization solver in complex numbers.* Technical Report hal-01422932, HAL Archives-Ouvertes, 2017.

[3] Christoph Helmberg et Franz Rendl. *A spectral bundle method for semidefinite programming.* SIAM Journal on Optimization 10.3 (2000): 673-696.

[4] Cédric Josz, Stéphane Fliscounakis, Jean Maeght, et Patrick Panciatici. *AC power flow data in MATPOWER and QCQP format: iTesla, RTE snapshots, and PEGASE.* arXiv preprint arXiv:1603.01533, 2016.

[5] Burak Kocuk, Santanu Dey, et Andy Sun. *Strong SOCP relaxations for the optimal power flow problem.* Operations Research 64.6 (2016): 1177-1196.

[6] Javad Lavaei et Steven Low. *Zero duality gap in optimal power flow problem.* IEEE Transactions on Power Systems 27.1 (2011): 92-107.

[7] Ramtin Madani, Abdulrahman Kalbat, et Javad Lavaei. *ADMM for sparse semidefinite programming with applications to optimal power flow problem.* 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2015.

[8] Daniel Molzahn, Jesse Holzer, Bernard Lesieutre, et Christopher DeMarco. *Implementation of a large-scale optimal power flow solver based on semidefinite programming.* IEEE Transactions on Power Systems 28.4 (2013): 3987-3998.

[9] François Oustry. *A second-order bundle method to minimize the maximum eigenvalue function.* Mathematical Programming 89.1 (2000): 1-33.