Comportement en temps long de schémas volumes finis hybrides pour les équations de convection-diffusion

J. Moatti, C. Chainais-Hillairet, M. Herda, S. Lemaire
Inria, Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé

Email : julien.moatti@inria.fr

Mots Clés : Schémas Volumes Finis, équation de convection-diffusion, maillages généraux, comportement en temps long, méthode d'entropie

Biographie – Doctorant dans l'équipe RAPSODI du centre Inria Lille-Nord Europe.
L'objectif de ma thèse est de développer et d'analyser des schémas d'ordre élevé pour des modèles de convection-diffusion, préservant certaines propriétés physiques des solutions (positivité et comportement en temps long).

Resumé :

Dans cette présentation, on s'intéresse à l'approximation numérique d'équation de convection-diffusion linéaire de la forme

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\Lambda(\nabla u + u\nabla\phi)) = f$$

sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \{1,2,3\}$) où $\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ est un tenseur de diffusion (potentiellement anisotrope), $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ un potentiel régulier et $f \in L^2(\Omega)$. Cette équation est un exemple type d'équation dissipative, qui constitue un élément de base pour modéliser de nombreux phénomènes physiques et biologiques (mécanique des fluides, phénomènes de corrosion, modélisation de semi-conducteurs ...).
La structure de ces équations donne aux solutions certaines propriétés remarquables. Elles vérifient notamment des principes du maximum permettant d'assurer la positivité des solutions pour des données adaptées. De plus, le comportement en temps long des solutions est connu : la solution converge exponentiellement vite vers un état stationnaire quand $t \to \infty$.

Dans le cadre d'une approximation numérique, la conservation de certaines propriétés de la solution peut être cruciale. En particulier, on peut penser aux propriétés de monotonie (ou, dans une moindre mesure, de positivité) ou à la conservation de la masse. La préservation de certains comportements asymptotiques, dont le comportement en temps long, peuvent s'avérer très importantes pour assurer la fiabilité des schémas utilisés pour simuler des phénomènes sur de très longues durées. De plus, dans certaines applications concrètes, le maillage est une donnée du problème : le schéma doit pouvoir être utilisé sur des maillages les moins contraints possible.

Dans cet exposé, on présente trois schémas de type volumes finis hybrides [5] pour discrétiser l'équation de convection-diffusion, qui préservent le comportement en temps longs des solutions. Ce type de schéma permet notamment de gérer des tenseurs de diffusion anisotropes et hétérogènes, tout en restant robuste sur une large classe de maillages.
Le premier schéma repose sur une discrétisation séparée des flux de convection et de diffusion, dont la version stationnaire est analysée dans [1]. Son analyse repose sur la coercivité du problème. Pour s'affranchir de ces hypothèses de coercivité sur les données, on introduit deux autres schémas : l'un, dit "Exponential-fitting", est une adaptation du schéma introduit dans [2] reposant sur un changement d'inconnue, tandis que l'autre est un schéma non-linéaire dans la lignée des schémas VAG et DDFV de [4, 3].
Pour ces trois approches, on prouve le caractère bien posé des schémas, ainsi que la positivité des solutions du schéma non-linéaire. On montre ensuite comment adapter les méthodes d'entropie - utilisées pour analyser l'asymptotique des solutions continues - au cadre discret, afin d'assurer le bon comportement en temps long des solutions discrètes.

Les résultats théoriques obtenus sont illustrés par des simulations numériques, permettant de comparer les performances effectives des schémas.

Références

[1] Lourenco Beirão da Veiga, Jérôme Droniou, and Gianmarco Manzini. A unified approach for handling convection terms in finite volumes and mimetic discretization methods for elliptic problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 31(4):1357–1401, 2011. Publisher: Oxford University Press (OUP).

[2] Franco Brezzi, Luisa Donatella Marini, and Paola Pietra. Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(6):1342–1355, 1989.

[3] Clément Cancès, Claire Chainais-Hillairet, Maxime Herda, and Stella Krell. Large time behavior of nonlinear finite volume schemes for convection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 58(5):2544–2571, 2020.

[4] Clément Cancès and Cindy Guichard. Numerical analysis of a robust free energy diminishing Finite Volume scheme for parabolic equations with gradient structure. *Foundations of Computational Mathematics*, 17(6):1525–1584, 2017.

[5] Robert Eymard, Thierry Gallouët, and Raphaèle Herbin. Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes. SUSHI: a scheme using stabilisation and hybrid interfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 30(4):1009–1043, 2010. Publisher: Oxford University Press (OUP).