

Modélisation et simulation de la perfusion de microvaisseaux artificiels

Mathieu Barré, CLAIRE A. DESSALLES, CÉLINE GRANDMONT, PHILIPPE MOIREAU
Inria – LMS, École Polytechnique, CNRS – Institut Polytechnique de Paris, LadHyX, CNRS, École Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris, Inria – LJLL, Sorbonne Université – Université Libre de Bruxelles

Email : mathieu.a.barre@inria.fr

Mots Clés : Microfluidique, Poromécanique, Existence de solutions faibles et fortes, T -coercivité, Éléments finis mixtes

Biographie – Après un parcours d’ingénieur à l’ENSTA Paris et le master Analyse, Modélisation et Simulation de l’Université Paris-Saclay, je suis actuellement en thèse à Inria Saclay. Je travaille dans l’équipe M ϵ DISIM, sous la direction de Céline Grandmont et Philippe Moireau. Ma thèse est financée par le Labex de Mathématique Hadamard.

Resumé :

L’étude des mécanismes relatifs à la perfusion des tissus biologiques est un sujet très actuel aux applications nombreuses. En effet, le dysfonctionnement de ces mécanismes est à l’origine du développement de plusieurs maladies vasculaires comme l’hypertension ou la thrombose. Dans ce contexte, une équipe du Laboratoire d’Hydrodynamique de l’École Polytechnique a mis en place un dispositif expérimental de microfluidique visant à répliquer l’environnement mécanique vasculaire pour étudier son impact sur les cellules [5]. Dans ce travail, nous proposons un modèle mathématique permettant de reproduire numériquement ces expériences et analysons les propriétés théoriques et numériques de ce modèle.

Le dispositif expérimental met en jeu un hydrogel de collagène percé par un microcanal cylindrique dans lequel est injectée de l’eau. Le microcanal représente un microvaisseau humain et l’hydrogel un biomatériau poroélastique. On modélise cette expérience par un système d’équations aux dérivées partielles. Deux types de modélisation sont envisagées : un modèle pour l’hydrogel seul et un modèle couplé entre l’hydrogel et le canal. Pour l’hydrogel, on considère un modèle linéaire de poromécanique récent [3, 2] qui généralise les équations de Biot et de Darcy-Brinkman. Pour le modèle couplé, l’eau circulant dans le canal est modélisée par les équations de Stokes et des conditions de transmission avec le milieu poreux sont établies de sorte à satisfaire un bilan d’énergie.

Du point de vue mathématique, le modèle de poromécanique proposé est un modèle fortement couplé de type hyperbolique – parabolique qui a déjà été étudié pour un matériau compressible [2, 1]. À l’aide de la théorie des semi-groupes, nous prouvons l’existence de solutions fortes et de solutions faibles dans le cas compressible mais également dans le cas incompressible, qui correspond au régime physiologique. Le problème sous-jacent n’étant pas coercif, on utilise la notion de T -coercivité [4] pour montrer son caractère bien posé et obtenir des estimations de stabilité. La principale difficulté vient du couplage en pression et, dans le cas incompressible, on retrouve comme dans [1] une condition inf-sup indépendante de la porosité. Par ailleurs, la régularité du problème stationnaire associé est explorée numériquement. Pour le modèle couplé fluide – milieu poreux, les estimations d’énergie fournissent l’existence de solutions faibles.

Ces éléments d’analyse nous permettent de proposer et d’analyser une discrétisation du problème avec des éléments finis vérifiant une condition inf-sup discrète. Le schéma en temps est monolithique et basé sur un schéma d’Euler implicite (des méthodes de splitting seront envisagées dans des études prochaines afin de réduire les coûts de calculs tout en préservant de bonnes propriétés de

stabilité du schéma). L'utilisation du modèle pour décrire la perfusion de microvaisseaux artificiels est alors validée en comparant les résultats numériques aux résultats expérimentaux. Enfin, la simulation numérique met en lumière l'influence des différents paramètres physiques sur la réponse mécanique du microcanal.

Références

- [1] Nicolás Barnafi, Paolo Zunino, Luca Dedè, and Alfio Quarteroni. Mathematical analysis and numerical approximation of a general linearized poro-hyperelastic model. *Computers & Mathematics with Applications*, 91:202–228, 2021.
- [2] Bruno Burtschell, Philippe Moireau, and Dominique Chapelle. Numerical analysis for an energy-stable total discretization of a poromechanics model with inf-sup stability. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 35(1):28–53, 2019.
- [3] Dominique Chapelle and Philippe Moireau. General coupling of porous flows and hyperelastic formulations—from thermodynamics principles to energy balance and compatible time schemes. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 46:82–96, 2014.
- [4] Lucas Chesnel and Patrick Ciarlet. T-coercivity and continuous galerkin methods: application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numerische Mathematik*, 124(1):1–29, 2013.
- [5] Claire A Dessalles, Clara Ramón-Lozano, Avin Babataheri, and Abdul I Barakat. Luminal flow actuation generates coupled shear and strain in a microvessel-on-chip. *bioRxiv*, 2021.