Propagation du chaos et hypothèse poissonienne pour les champs moyens à répliques

M. DAVYDOV, F. Baccelli
École Normale Supérieure et INRIA Paris, *École Normale Supérieure et INRIA Paris*

Email : michel.davydov@inria.fr

Mots Clés : Processus ponctuel; processus de Hawkes; processus de Markov; théorie des champs moyens; modèle à répliques; réseau de neurones; réseau de files d'attente; propagation du chaos; hypothèse poissonienne

Biographie – Michel Davydov est en deuxième année de thèse dans l'équipe DYOGENE de l'INRIA Paris membre de l'ERC NEMO, projet de recherche inter-disciplinaire centré sur la dynamique des réseaux stochastiques. Après une scolarité achevée à l'ENS Paris-Saclay, il a obtenu une bourse de thèse par son école et a entamé sa thèse sous la direction de François Baccelli dans l'objectif d'étudier certains modèles issus des neurosciences computationnelles.

Resumé :

Des phénomènes aussi variés que la propagation des épidémies, les dynamiques d'opinion, le contrôle des flux sur internet ou même les computations neuronales peuvent être modélisés comme des interactions ponctuelles entre agents interconnectés. Les phénomènes d'intérêt dans toutes ces situations sont alors vus comme des dynamiques de réseau sur un graphe d'agents qui interagissent via des processus ponctuels : les arêtes du graphe sont le support des interactions, et des processus ponctuels associés à chaque arête enregistrent les temps auxquels ces interactions se produisent. Ce cadre très général de dynamiques de réseaux fournit une classe de modèles très versatiles pouvant servir aussi bien dans les sciences de la vie qu'en ingénieurie ou en économie. Cependant, cette versatilité a un coût : la complexité des interactions rend l'analyse mathématique directe de ces modèles impossible excepté pour les architectures de réseau les plus simples.

Aussi, pour compléter la simulation numérique, il est nécéssaire d'effectuer des hypothèses simplificatrices pour obtenir des modèles tractables. Dans cet esprit, la simplification la plus courante est le modèle de champ moyen : il s'agit de considérer que les interactions reçues par un agent donné du réseau peuvent s'exprimer comme une moyenne empirique de l'ensemble des interactions du réseau. Dans ce cas de figure, on étudie le modèle obtenu à la limite en faisant tendre le nombre d'agents vers l'infini, en supposant donc que les interactions sont donc nécéssairement d'ordre $\frac{1}{N}$, où N représente le nombre d'agents [6]. Cette simplification ne préserve donc ni la géométrie du réseau initial, ni les corrélations dues à la taille finie du réseau, qui peuvent se révéler importantes dans certaines applications, comme par exemple en neurosciences.

Pour pallier ce problème, nous étudions une autre classe de modèles de champ moyen intialement apparus dans certains modèles de télécommunications et inspirés de la physique statistique, les champs moyens à répliques [4]. Dans ceux-ci, au lieu d'échelonner par rapport au nombre d'agents, nous considérons M copies du réseau initial, que nous appellons répliques. Les interactions subissent alors un routage uniforme entre les répliques de la manière suivante : si l'agent i devait interagir avec l'agent j au sein de la réplique n, à la place une réplique est choisie uniformément et indépendamment sur $\{1, \ldots, M\} \setminus \{n\}$ et l'agent i de la réplique initiale interagit avec l'agent j de la nouvelle réplique ainsi choisie. Dans l'objectif d'avoir un modèle tractable, on s'intéresse alors à la limite lorsque le nombre M de répliques tend vers l'infini.

Dans [2], un tel modèle à répliques est étudié dans le cadre d'une dynamique de neurones dite de Galves-Löcherbach, modèle classique en neurosciences [3]. Il fut conjecturé que, dans la limite du champ moyen à répliques lorsque le nombre de répliques tend vers l'infini, les répliques deviennent

asymptotiquement indépendantes (propagation du chaos) et le processus ponctuel des arrivées à un agent donné converge vers un processus de Poisson (hypothèse poissonienne). Sous cette conjecture, il fut montré que l'on pouvait obtenir des formes closes pour les dynamiques de Galves-Löcherbach et que le champ moyen à répliques approchait mieux le modèle original que le champ moyen classique.

Dans cet exposé, nous présenterons nos résultats récents [1] prouvant la validité de cette conjecture dans des cadres plus larges que celui du modèle de Galves-Löcherbach. Concrètement, nous introduirons deux classes de processus, en temps discret et en temps continu, que nous appelons processus de fragmentation-interaction-aggrégation, pour lesquelles nous prouverons la propagation du chaos et l'hypothèse poissonienne. Notre démarche pour cela est différente des méthodes de compacité employées par exemple par [5] pour l'analyse de champs moyens classiques. Dans le cadre continu, nous donnerons une vitesse de convergence du modèle à répliques vers sa limite poissonienne. Enfin, nous montrerons qu'il existe une correspondance entre les modèles en temps discret et en temps continu en utilisant le caractère markovien des processus.

Références

[1] François Baccelli, Michel Davydov, and Thibaud Taillefumier. Replica-mean-field limits of fragmentation-interaction-aggregation processes. *Advances in Applied Probability (à paraitre)*, 2020.

[2] François Baccelli and Thibaud Taillefumier. Replica-mean-field limits for intensity-based neural networks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 18(4) :1756–1797, 1 2019.

[3] Angelo Masi, Antonio Galves, Eva Löcherbach, and Errico Presutti. Hydrodynamic limit for interacting neurons. *Journal of Statistical Physics*, 158 :866–902, 2015.

[4] F. I. Karpelevich N. D. Vvedenskaya, R. L. Dobrushin. Queueing System with Selection of the Shortest of Two Queues : An Asymptotic Approach. *Probl. Peredachi Inf.*, 32 :20–34, 1996.

[5] Serge Pirogov, Alexander Rybko, Senya Shlosman, and Alexander Vladimirov. Propagation of Chaos and Poisson Hypothesis. *Problems of Information Transmission*, 54(3) :290–299, July 2018.

[6] Alain-Sol Sznitman. Topics in propagation of chaos. *Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XIX, vol.1464*, pages 165–251, 1989.