Une méthode HHO explicite pour la dynamique des structures

Morgane Steins[1,2,3], Florence Drui[1], Alexandre Ern[2,3], Olivier Jamond[1]
[1]*DES/ISAS/DM2S/SEMT/DYN - CEA,* [2]*CERMICS - École des Ponts,* [3]*INRIA Paris,*

Email : morgane.steins@enpc.fr

Mots Clés : Méthode HHO, équation des ondes, intégration temporelle

Biographie – En thèse industrielle au CEA Saclay et au CERMICS de l'école des Ponts, je travaille sur l'utilisation de la méthode *Hybrid High Order (HHO)* pour des simulations en dynamique rapide. Je me concentre également sur les enjeux d'implémentation dans un code de calcul haute performance en `C++` dédié aux simulations en mécanique et thermique.

Resumé :

La simulation numérique en dynamique des structures repose classiquement sur deux outils : d'une part la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale, d'autre part des algorithmes d'intégration en temps explicites. Un troisième aspect peut être évoqué : le raffinement de maillage adaptatif (AMR), permettant d'affiner localement la solution tout en conservant des temps de calculs raisonnables. Un des désavantages de l'utilisation des éléments finis est l'apparition d'un *verrouillage volumique*, traduisant un nombre de contraintes trop important lorsqu'on souhaite considérer des déformations incompressibles. L'AMR demande également des adaptations de la méthode des éléments finis pour la gestion des nœuds orphelins. L'avantage de la méthode HHO [5, 4] est de régler ces deux problématiques tout en demandant une modification minimale des environnements de calcul déjà en place.

La méthode HHO est une méthode de discrétisation spatiale hybride dans laquelle la solution est recherchée sous la forme d'une paire d'inconnues. Des inconnues de face approchent la trace de la solution sur les faces du maillage tandis que des inconnues de cellule approchent la solution volumique dans les cellules. Les inconnues sont recherchées dans des espaces polynomiaux par morceaux sur chaque cellule et chaque face du maillage. Ces polynômes peuvent être discontinus à l'interface entre deux cellules du maillage, entre une cellule et ses faces et d'une face à l'autre. Il s'agit donc d'une approximation non conforme. L'ordre polynomial principal est celui des inconnues de faces, celui des inconnues de cellules peut être d'un ordre supérieur, il s'agit alors d'une variante de la méthode initiale. La méthode HHO se rapproche des méthodes Hybrid Discontinuous Galerkin (HDG) [3]. Parmi les avantages des méthodes HHO/HDG, on peut citer : le support de maillages polyédriques quelconques, des ordres de convergence optimaux, des principes de conservation locaux ainsi qu'une efficacité computationnelle. En effet, les inconnues de cellule peuvent être éliminées par condensation statique, ce qui réduit la taille du système linéaire associé aux seules inconnues de face.

Dans l'objectif de l'utilisation de cette méthode pour la dynamique des structures, nous nous sommes d'abord intéressés à l'adaptation de la méthode HHO, initialement conçue pour la diffusion et l'élasticité linéaire, à l'équation des ondes acoustiques. Concernant les ordres de convergence en espace, il a été prouvé théoriquement [2] et numériquement [1] qu'ils sont conservés.

La non linéarité des problèmes étudiés plaide pour l'utilisation d'algorithmes explicites. Même un algorithme impliquant la résolution d'un système linéaire à chaque itération temporelle peut s'avérer onéreux. Le prix à payer pour un algorithme explicite est une condition de stabilité sur le pas de temps. Or, la relation entre cellules et faces de la méthode HHO engendre un couplage implicite. Il s'avère donc nécessaire d'adapter la méthode et pour ce faire plusieurs techniques sont

envisagées. Une première est l'utilisation d'une formulation duale dans un système du premier ordre, comme évoqué dans [1].

Une méthode plus standard dans le contexte de la dynamique des structures est l'utilisation d'un *splitting* des opérateurs, en introduisant l'utilisation de la solution, non seulement au temps courant de résolution, mais également au temps précédent. Ceci permet de conserver la forme primale de l'équation considérée. Nous présenterons ici des résultats pour l'ordre polynomial le plus bas, montrant que ce splitting peut conserver les ordres de convergence en temps et en espace. Des exemples de techniques pour les ordres élevés sont également à l'étude.

Références

[1] Erik Burman, Omar Duran, and Alexandre Ern. Hybrid high-order methods for the acoustic wave equation in the time domain. To appear in *Commun. Appl. Math. Comput.* (CAMC), 2021.

[2] Erik Burman, Omar Duran, Alexandre Ern, and Morgane Steins. Convergence Analysis of Hybrid High-Order Methods for the Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, 87(3) :91, 2021.

[3] Bernardo Cockburn, Daniele Di Pietro, and Alexandre Ern. Bridging the Hybrid High-Order and Hybridizable Discontinuous Galerkin Methods. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(3) :635–650, 2016.

[4] Daniele Antonio Di Pietro and Alexandre Ern. A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :1–21, 2015.

[5] Daniele A. Di Pietro, Alexandre Ern, and Simon Lemaire. An arbitrary-order and compact-stencil discretization of diffusion on general meshes based on local reconstruction operators. *Comput. Methods Appl. Math.*, 94(4) :461–472, 2014.