Schéma FVC sur des maillages triangulaires non-uniformes : Application aux équations de Saint-Venant.

M.ZIGGAF, F.BENKHALDOUN, I.ELMAHI, I.KISSAMI, M.BOUBEKEUR
UM6P-MSDA Benguerir-Maroc, USPN-LAGA Villetaneuse-France et UMP-LMCS Oujda-Maroc, *USPN-LAGA, UM6P-MSDA and UMP-LMCS, UM6P-MSDA, USPN-LAGA*

Email : ziggaf@math.univ-paris13.fr

Mots Clés : Schéma FVC, Méthode des volumes finis, Méthode des caractéristiques, Équations de Saint-Venant, Schéma bien équilibré

Biographie – Moussa Ziggaf est un doctorant en mathématiques appliquées inscrit dans le cadre d'une co-tutelle entre l'Université Sorbonne Paris Nord (USPN) et l'Université Mohammed Premier (UMP). Il est aussi membre de l'équipe HPC du laboratoire MSDA - Université Mohammed VI Polytechnique (UM6P). Sa thèse fait partie des projets scientifiques financés par l'UM6P. Ses travaux sont principalement liés à l'analyse numérique des EDPs issues de la mécanique des fluides et des sciences des matériaux. Plus précisément, sa recherche est orientée vers le développement de certaines solutions numériques pouvant d'une part, participer à la compréhension et la résolution des certaines problématiques en relation avec les procédés du groupe OCP, et d'autre part, présenter certaines contributions scientifiques dans le même cadre de recherche.

Resumé : Les équations de Saint-Venant (1) sont largement utilisées pour modéliser les marées, les ruptures de barrage, les tempêtes, les tsunamis, et en général, les différents flux géophysiques en eau peu profonde à surface libre [1]. Ce système hyperbolique de lois de conservations a été introduit dans [2], et il a été très couramment utilisé dans plusieurs travaux [3, 4, 5] lorsqu'il est complété par des termes appropriés. La solution numérique de ce genre de modèles est un défi en raison de leur structure non linéaire, des termes sources supplémentaires qui sont en général non réguliers, et aussi de la complexité du domaine de calcul. Nous allons nous intéresser dans cette étude à la résolution numérique de la version bidimensionnelle de ce système d'équations avec un terme source de topographie en utilisant une nouvelle approche volumes finis sur des maillages non structurés. Nous présentons tout d'abord un solveur homogène simple et précis issu d'un schéma volumes finis de type prédicteur-correcteur avec une méthode des caractéristiques pour le prédicteur. Ce schéma est appelé schéma caractéristiques-volumes finis (FVC « Finite Volume Characteristics »), il a été introduit dans les travaux préliminaire [6, 7]. Ensuite, nous introduisons une généralisation de ce schéma en préservant les propriétés du solveur homogène et nous aboutissons à un schéma bien équilibré satisfaisant l'équilibre du lac au repos. Enfin, l'approche volumes finis proposée est vérifiée sur plusieurs tests de référence et elle montre un bon accord avec les solutions analytiques et les autres approches.

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t h\mathbf{u} + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(gh^2) = -gh\boldsymbol{\nabla} Z - f_c \times h\mathbf{u} - r(h,\mathbf{u}) + \tau(h,\breve{\mathbf{u}}) + \nu \overrightarrow{\triangle} h\mathbf{u}, \end{cases} \tag{1}$$

tel que les inconnues sont la hauteur d'eau $h(t,x,y) \geqslant 0$, et le vecteur vitesse $\mathbf{u}(t,x,y) = (u,v)^T(t,x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Le paramètre f_c est lié à la vitesse angulaire de la rotation de la Terre, g représente l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et $r(h,\mathbf{u})$ décrit le terme de frottement de l'eau avec le fond tel que, $r(h,\mathbf{u}) = (r_{f_x}, r_{f_y}) := \eta^2 g h^{-1/3}|\mathbf{u}|\mathbf{u}$, où η est le nombre de Manning. La fonction $Z(x,y)$

dessine le profil du fond, $\tau(h, \breve{\mathbf{u}}) = (\tau_{s_x}, \tau_{s_y}) := \frac{1}{2}\breve{C}_f|\breve{\mathbf{u}}|\breve{\mathbf{u}}$, dans lequel $\breve{\mathbf{u}} = (\breve{u}, \breve{v})^T$ représente la vitesse du vent et $\breve{C}_f$ est le coefficient de frottement du vent avec l'eau et enfin ν représente le coefficient de diffusion associé au terme, $\overrightarrow{\triangle} h\mathbf{u} := (\triangle(hu), \triangle(hv))$.

Références

[1] Jean-Michel Hervouet. Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis. Presses des Ponts et Chausseés 2003 (in French).

[2] Adhamar Barre de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. C.R. Acad. Sci. Paris 73 (1871) 147–154.

[3] Emmanuel Audusse, François Bouchut, Marie-Odile Bristeau, Rupert Klein, and Benoı t Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2050–2065, 2004.

[4] Fayssal Benkhaldoun, Imad Elmahi, Saida Sari, and Mohammed Seaid. An unstructured finite-volume method for coupled models of suspended sediment and bed load transport in shallow-water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(9):967–993, 2013.

[5] Allen C Kuo and Lorenzo M Polvani. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity rearrangement. *Physics of Fluids*, 12(5):1087–1100, 2000.

[6] Fayssal Benkhaldoun, Saida Sari, and Mohammed Seaid. Projection finite volume method for shallow water flows. *Mathematics and computers in simulation*, 118:87–101, 2015.

[7] Moussa Ziggaf, Mohamed Boubekeur, Fayssal Benkhaldoun, Imad El Mahi, and Imad Kissami. The FVC scheme on unstructured meshes for the two-dimensional shallow water equations. *International Conference on Finite Volumes for Complex Applications 455–465*, 2020.