Ondes en milieux quasi-périodiques

Le cas unidimensionnel dissipatif : Étude et résolution numérique

Pierre AMENOAGBADJI, Sonia FLISS, Patrick JOLY
POEMS - UMA - ENSTA Paris - IPP, *POEMS - UMA - ENSTA Paris - IPP*

Email : pierre.amenoagbadji@ensta-paris.fr

Mots Clés : Milieux quasi-périodiques, Equation de Helmholtz, Guide d'ondes, Opérateurs de Dirichlet-to-Neumann.

Biographie – Depuis octobre 2020, je suis doctorant au laboratoire POEms. Financée par l'Ecole Polytechnique, ma thèse est encadrée par Sonia Fliss et par Patrick Joly. Je m'intéresse à la résolution numérique de l'équation des ondes acoustiques dans des milieux quasi-périodiques, dont une des applications concerne les problèmes de transmission entre deux milieux périodiques. Avant cela, j'ai obtenu un diplôme d'ingénieur généraliste de l'ENSTA Paris, ainsi qu'un diplôme de Master en mathématiques appliquées (AMS) à l'Université Paris-Saclay.

Resumé :
Les milieux quasi-périodiques sont connus pour leur structure ordonnée, mais non périodique. Depuis la découverte récente des quasi-cristaux, premiers exemples de milieux quasi-périodiques, ces milieux n'ont cessé de susciter de l'engouement, notamment en raison des remarquables propriétés physiques et en particulier photoniques qui leur sont attribuées. Il y a donc un intérêt réel à simuler la propagation des ondes dans de tels milieux.

Dans la littérature mathématique, la notion de quasi-périodicité (et plus généralement de presque périodicité) est bien connue [2]. Par exemple, une fonction d'une variable réelle est quasi-périodique d'ordre $n > 0$ si elle s'écrit comme la trace dans une direction donnée d'une fonction périodique de n variables. Les équations aux dérivées partielles (EDP) avec des coefficients quasi-périodiques ont aussi fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques [5]. En particulier, l'homogénéisation des milieux quasi-périodiques s'appuie sur la méthode dite de *coupe* [1, 3, 6], qui consiste à prolonger l'EDP quasi-périodique en une EDP de dimension supérieure à coefficients périodiques, mais dégénérée (dans le sens où la partie principale de l'opérateur est non-elliptique). Il semble cependant que la méthode de coupe n'ait jamais été exploitée pour la résolution numérique, ou pour des problèmes de propagation d'ondes. Notre objectif est précisément de la développer dans ce cadre.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équation des ondes en régime harmonique, posée dans un milieu unidimensionnel quasi-périodique, et non borné. Dans un premier temps, le cas dissipatif est considéré. La méthode de coupe appliquée à ce problème conduit à la résolution d'un problème non-elliptique, posé en dimension supérieure, mais avec des coefficients périodiques. Pour ce nouveau problème, on peut alors adapter la méthode développée dans [4], qui repose sur la résolution de problèmes de cellule, et sur la construction d'un opérateur de *propagation* $\mathcal{P}$, solution d'une équation de Riccati stationnaire. L'analyse de cette méthode est sensiblement plus délicate que dans le cas de l'équation de Helmholtz complète, notamment à cause des propriétés spectrales radicalement différentes de $\mathcal{P}$, dues à la dégénérescence du problème. L'efficacité de la méthode globale est illustrée par des simulations numériques. Des premiers résultats numériques concernant le cas non dissipatif sont également montrés.

Références

[1] Xavier Blanc, Claude Le Bris, and Pierre-Louis Lions. Local profiles for elliptic problems at different scales: defects in, and interfaces between periodic structures. *Communications in Partial Differential Equations*, August 2015.

[2] Harald Bohr. *Almost periodic functions (Translated from German)*. 1947.

[3] David Gérard-Varet and Nader Masmoudi. Homogenization in polygonal domains. *Journal of the European Mathematical society*, 13(5):1477–1503, 2011.

[4] Patrick Joly, Jing-Rebecca Li, and Sonia Fliss. Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation. *Commun. Comput. Phys*, 1(6):945–973, 2006.

[5] Boris Moiseevich Levitan and Vasilii Vasilévich Zhikov. *Almost periodic functions and differential equations*. 1982.

[6] Niklas Wellander, Sébastien Guenneau, and Elena Cherkaev. Homogenization of quasiperiodic structures and two-scale cut-and-projection convergence. *arXiv e-prints*, page arXiv:1911.03560, nov 2019.