Congrès des Jeunes Chercheurs en Mathématiques Appliquées - Modèle de résumé

P. Gervais,
Université de Paris,

Email : pierre.gervais@ens.fr

Mots Clés : Limites hydrodynamiques, théorie cinétique, mécanique des fluides, élargissement

Biographie – Après avoir validé ma licence de mathématiques-informatique puis mon master de mathématiques fondamentales à l'université de Paris, j'ai rejoint le Département de Mathématiques et Applications de l'ENS de Paris lorsque j'ai commencé ma thèse avec Isabelle Gallagher et Isabelle Tristani, financée par l'université de Paris.

Resumé :

La question des limites hydrodynamiques remonte au problème énoncé par Hilbert en 1900 concernant la description de l'évolution d'un gaz au cours du temps : plusieurs échelles de description peuvent être envisagées et le but est d'obtenir une description unifiée qui englobe à la fois l'échelle microscopique (les trajectoires des différentes particules de positions $(x_i(t))_{i=1}^N$ sont décrites grâce aux équations de Newton) et l'échelle macroscopique (l'évolution des quantités observables telles que la vitesse moyenne $u(t,x)$ ou la température $\theta(t,x)$ est décrite grâce aux équations de la mécanique des fluides). Une échelle intermédiaire a été introduite, l'échelle mésoscopique dans laquelle on décrit (grâce aux équations de la théorie cinétique des gaz) l'évolution de la densité de particules $f(t,x,v)$ définie sur l'espace des phases, fournissant une description du comportement typique d'une particule. L'étude du lien entre les niveaux mésoscopique et macroscopique et plus précisément de la dérivation d'équations de la mécanique des fluides comme l'équation de Navier-Stokes à partir de celles de la théorie cinétique des gaz comme l'équation de Boltzmann remontent à Hilbert et Chapman-Enskog qui ont obtenu des résultats de dérivation formelle. Ma thèse est centrée autour de l'étude de ce type de problématique dans un cadre rigoureux. Il s'agit d'un sujet qui a déjà beaucoup été étudié, nous rappelons ici brièvement plusieurs types de résultats qui peuvent être envisagés selon le cadre de solutions plus ou moins fortes choisi.

- Le programme démarré dans les années 90 par [2, 3] visait à faire le lien entre ces niveaux de description dans un cadre de solutions faibles (les solutions renormalisées à la Di Perna-Lions pour l'équation de Boltzmann et les solutions de Leray pour l'équation de Navier-Stokes). Nous pouvons notamment citer les travaux [1, 11, 13, 14].
- Dans [4] une dérivation rigoureuse est obtenue via une étude spectrale de l'opérateur linéarisé de Boltzmann à la Ellis et Pinsky [8] dans le cadre de solutions globales pour Navier-Stokes.
- Les travaux [5, 6] ont pour but d'obtenir des estimations uniformes en le petit paramètre de remise à l'échelle de l'équation de Boltzmann dans un cadre proche de l'équilibre. Ces estimations uniformes permettent ensuite d'utiliser les dérivations évoquées au-dessus.
- Enfin, un point de vue différent peut être adopté : montrer que tant qu'une solution de l'équation de Navier-Stokes existe, alors une solution de l'équation de Boltzmann aussi (et les deux sont proches), nous pouvons notamment citer à ce propos [7] ou plus récemment [9].

Plus précisément, le lien entre les théories «mild» de Boltzmann et du système de Navier-Stokes-Fourier a été très étudiée sous l'hypothèse d'une décroissance Gaussienne en la variable de vitesse v, notament dans [4, 5, 8, 9]. Ma thèse a pour objectif principal de relaxer cette hypothèse en celle d'une décroissance algébrique (qui est physiquement plus sensé). Cela est permis par la récente «théorie d'élargissement» initiée par Mouhot dans [15] et développée dans [12]. J'ai déjà pu généraliser les résultats de [8] dans un article [10] qui devrait être publié prochainement dans le journal KRM.

Références

[1] The incompressible Navier–Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 91:508–552, 2009.

[2] Claude Bardos, Francois Golse, and David Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63:323–344, 1991.

[3] Claude Bardos, François Golse, and C. David Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations II Convergence proofs for the Boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46:667–753, 1993.

[4] Claude Bardos and Seiji Ukai. The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pages 235–257, 1991.

[5] Marc Briant. From the Boltzmann equation to the incompressible Navier–Stokes equations on the torus: A quantitative error estimate. *Journal of Differential Equations*, 259:6072–6141, 2015.

[6] Marc Briant, S Merino-Aceituno, and C. Mouhot. From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weights. *Analysis and Applications.*

[7] A. de Masi, R. Esposito, and J. L. Lebowitz. Incompressible navier-stokes and euler limits of the boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42:1189–1214, 1989.

[8] Richard Ellis and Mark Pinsky. The first and second fluid approximations of the linearized boltzmann equation. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, pages 125–156, 1975.

[9] Isabelle Gallagher and Isabelle Tristani. On the convergence of smooth solutions from Boltzmann to Navier-Stokes. *Annales Henri Lebesgue*, page 561–614, 2019.

[10] Pierre Gervais. Spectral study of the linearized boltzmann operator in L^2 spaces with polynomial and gaussian weights, 2020. arXiv:2010.10339.

[11] Francois Golse and Laure Saint-Raymond. The navier-stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Inventiones Mathematicae*, 155:81–161, 01 2004.

[12] Maria Pia Gualdani, Stéphane Mischler, and Clément Mouhot. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. *Mémoires de la SMF*, 153, 2017.

[13] C. Levermore and Nader Masmoudi. From the boltzmann Equation to an incompressible Navier–Stokes–Fourier system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 196:753–809, 06 2010.

[14] P.-L Lions and Nader Masmoudi. From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics, ii. *Arch Ration Mech Anal*, 158:195–211, 06 2001.

[15] Clément Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 261:629–672, 2005.