Congrès des Jeunes Chercheurs en Mathématiques Appliquées - Planification de trajectoires des systèmes dynamiques contrôlés par la méthode de continuation régularisée

T. Schmoderer, E. Trélat
INSA Rouen Normandie, Sorbonne Université

Email : timothee.schmoderer@insa-rouen.fr

Mots Clés : Systèmes dynamiques, Théorie du contrôle, Planification de trajectoires, Méthode de continuation par homotopie, Régularisation de Tikhonov

Biographie – Je suis doctorant en 3ème année au laboratoire de Mathématiques de l'INSA Rouen Normandie (LMI). Je suis encadré par W. Respondek (LMI) et E. Trélat de Sorbonne université (LJLL). Ma thèse a pour objet l'étude des systèmes dynamiques contrôlés, avec d'une part une étude théorique consistant à classifier de tels systèmes sous l'action d'un groupe de transformations, et d'autre part, à développer et étudier un algorithme de planification des trajectoires de tels systèmes.

Resumé : Dans cet exposé, nous étudierons les systèmes dynamiques contrôlés donnés sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) g_i(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } u_i \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}).$$

Pour un tel système, x décrit l'état, $\dot{x}$ est la variation en temps de l'état et $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ sont les contrôles c'est à dire des fonctions choisies. On suppose que l'état $x(0) = x_0$ est connu et fixé. Un des objectifs principaux de la théorie du contrôle est l'étude de l'application entrée-sortie, qui à un contrôle $u(t)$ associe le point final en un temps $T > 0$ fixé de la trajectoire associée:

$$\begin{aligned} E_{x_0,T} \, : \, L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto E_{x_0,T}(u) = x(T, x_0, u). \end{aligned}$$

L'étude de cette fonctionnelle et notamment de ses singularités, c'est à dire des points u où la différentielle $dE_{x_0,T}(u)$ n'est pas surjective, fait l'objet de nombreux travaux.

Du point de vue des applications, il y a deux questions naturelles. La première est en général assez facile à résoudre, elle consiste à décrire l'ensemble des points $x(T)$ accessibles depuis x_0 à l'aide des contrôles $u(t)$. La seconde en revanche est plus délicate, étant donné un état final $x^\star \in \mathbb{R}^n$, accessible depuis x_0, nous cherchons à construire un contrôle (en général non unique) $u^\star(t)$ qui réalise $E_{x_0,T}(u^\star) = x^\star$. Ce problème est appelé *planification de trajectoires* dans la littérature et c'est à lui que nous consacrons une partie de la thèse et cet exposé.

Dans cet exposé nous nous intéresserons à la méthode de *continuation* introduite dans [6] et développée dans [1, 3, 5, 4] pour répondre au problème de la planification de trajectoires. L'idée de la méthode est de commencer par un contrôle arbitraire u^0 qui, en général, donne un état final x^0 différent de $x^\star$. Puis, à partir d'un chemin $\pi(s)$ qui relie x^0 à $x^\star$ (c'est à dire une fonction $\pi \, : \, [0,1] \to \mathbb{R}^n$ qui satisfait $\pi(0) = x^0$ et $\pi(1) = x^\star$) nous essayons de construire un relèvement de celui-ci dans l'espace des contrôles $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$. C'est à dire, nous construisons un chemin $\Pi(s)$ de contrôles qui vérifie $\Pi(0) = u^0$ et à chaque $s \in [0,1]$ nous avons $E_{x_0,T}(\Pi(s)) = \pi(s)$. Si cette procédure peut être menée jusqu'à $s = 1$ alors $\Pi(1)$ est une solution de notre problème. La résolution de cette méthode s'effectue par différentiation par rapport à s de la relation $E_{x_0,T}(\Pi(s)) = \pi(s)$ ce qui soulève les deux inconvénients de la méthode, premièrement il faut que $\pi(s)$ évite le lieu singulier de l'application $E(\cdot)$ (sinon, en un

tel point, l'équation différentielle est mal définie), et deuxièmement il faut garantir que l'équation différentielle résultante admette une solution globale sur $[0, 1]$. Il y a donc une condition locale et une condition globale pour assurer la faisabilité du processus et la convergence de l'algorithme.

L'idée présentée dans cet exposé et développée dans ma thèse est d'introduire une régularisation dans la méthode de continuation. Celle-ci est inspirée de la régularisation de Tikhonov dans la théorie du pseudo-inverse de Moore-Penrose (voir [2] pour une introduction détaillée) et permet de résoudre les deux problèmes de la méthode de continuation. En effet la régularisation assure que l'équation différentielle de la méthode de continuation est bien posée et qu'elle admet une solution globale. Dans l'exposé nous donnerons des résultats théoriques qui garantissent la convergence de la méthode régularisée vers une solution de la méthode de continuation lorsque le paramètre de régularisation tend vers 0. Enfin nous montrerons quelques exemples d'applications numériques illustrant la convergence et les limites de l'algorithme proposé.

Références

[1] François Alouges, Yacine Chitour, and Ruixing Long. A motion-planning algorithm for the rolling-body problem. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(5):827–836, 2010.

[2] João Carlos Alves Barata and Mahir Saleh Hussein. The Moore-Penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. *Brazilian Journal of Physics*, 42(1-2):146–165, 2012.

[3] Yacine Chitour. A continuation method for motion-planning problems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12(1):139–168, 2006.

[4] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Ruixing Long. A global steering method for nonholonomic systems. *Journal of Differential Equations*, 254(4):1903–1956, 2013.

[5] Yacine Chitour and Héctor J Sussmann. Line-integral estimates and motion planning using the continuation method. In *Essays on mathematical robotics*, pages 91–125. Springer, 1998.

[6] Hector Sussmann. A continuation method for nonholonomic path-finding problems. In *Proceedings of 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2718–2723. IEEE, 1993.