Stabilisation de l'équation des ondes discretisée par éléments finis d'ordre élevé en espace pour des problèmes d'assimilation de données par observateur.

T.Delaunay, P.Moireau, S.Imperiale
Inria — LMS, Ecole Polytechnique, CNRS — Institut Polytechnique de Paris,

Email : tiphaine.delaunay@inria.fr

Mots Clés : Contrôle des EDPs, observabilité discrète

Biographie – Je suis en première année de doctorat au sein de MΞDISIM, équipe jointe Inria et LMS - Ecole Polytechnique sous la direction de Philippe Moireau et Sébastien Imperiale. Mon sujet porte sur les observateurs adaptatifs pour les phénomènes propagatifs et leurs discrétisations associées. Le financement de ma thèse est un financement ANR. J'ai obtenu un diplôme d'ingénieur en mathématiques au sein de l'INSA Rouen Normandie et un master 2 Mathématiques fondamentales et appliquées (MFA) à l'Université de Rouen en 2020. Je présente ici mon stage de fin d'études qui a eu lieu au sein de MΞDISIM. Ma thèse s'inscrit dans la continuité de ce sujet.

Résumé :

Introduction. L'objectif de ce travail consiste à proposer et analyser des schémas numériques pour la résolution des problèmes d'assimilation de données par observateur pour des systèmes hyperboliques de type onde. L'idée principale derrière l'assimilation de données est d'améliorer la prédiction en intégrant des informations supplémentaires issues de mesures - aussi appelées observations. Cette stratégie se popularise pour améliorer la qualité des simulations numériques de phénomènes physiques. Ici on adopte une approche par observateur où l'on incorpore les données quand elles sont disponibles par un feedback intégrant l'écart entre la solution et les mesures. Ce type de méthodologie a été introduite dès les années 1960 pour les systèmes de dimension finie et leur efficacité se démontre par une propriété de stabilisation asymptotique de l'erreur entre la trajectoire reconstruit et la trajectoire poursuivie. Ces types de resultats se généralisent aujourd'hui aux EDPs.

Une application visée est l'assimilation de données pour des problèmes de propagation du sang en hémodynamique. Dans ces problèmes les équations sous-jacentes sont des équations hyperboliques (après linéarisation d'équations de type Saint-Venant autour d'une trajectoire prédéfinie) pour lesquelles on observe une partie de la solution.

Observabilité en continu. La construction d'observateur pour ces systèmes est désormais classique au niveau continu. L'efficacité de ces observateurs repose sur la démonstration du caractère exponentiellement stable du système sous-jacent lorsqu'on ajoute le terme dissipatif lié à la prise en compte des observations.

Cette stabilité exponentielle repose sur les inégalités d'observabilité où on montre que l'énergie du système est controlée par les observations.

Pour démontrer ces inégalités, plusieurs méthodes existent dans la littérature : la méthode des multiplicateurs (introduite par J-L Lions dès les années 80), les méthodes spectrales, les estimations de Carleman et l'analyse micro-locale. Pour notre problème d'hémodynamique 1D, l'approche par multiplicateurs est très naturelle et fournit des résultats quasi-optimaux.

Observabilité en discret. Hélas, la méthode des multiplicateurs est incompatible avec les besoins de discrétisation. En effet, sans modification des méthodes éléments finis classiques employées, la

stabilité exponentielle (uniformément en h, le pas de discrétisation) n'est pas conservée au niveau discret du fait de la présence d'ondes parasites.

Un terme stabilisant consistant à l'ordre élevé. Tout l'enjeu de notre travail est donc de proposer des correcteurs dans la discrétisation permettant de démontrer la stabilité exponentielle au niveau discret. L'idée maîtresse est d'ajouter un terme stabilisant qui soit de norme petite pour des fonctions régulières et forte pour des fonctions fortement oscillantes (telles que les ondes parasites). Ce terme est par ailleurs bien adapté pour convertir l'approche par multiplicateurs au niveau discret et ainsi démontrer la stabilité exponentielle du problème semi-discretisé à tout ordre sans affecter l'ordre de convergence.

Références

[1] Lucie Baudouin, Maya De Buhan, and Sylvain Ervedoza. Global carleman estimates for waves and applications. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(5) :823–859, 2013.

[2] Susanne Brenner and Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2007.

[3] Nicolas Burq and Patrick Gérard. *Contrôle optimal des equations aux derivées partielles.* Ecole polytechnique, Département de mathématiques, 2002.

[4] Steven Cox and Enrique Zuazua. The rate at which energy decays in a damped string. *Communications in partial differential equations*, 19(1-2) :213–243, 1994.

[5] Sylvain Ervedoza, Aurora Marica, and Enrique Zuazua. Numerical meshes ensuring uniform observability of 1d waves : construction and analysis. 2015.

[6] Sébastien Imperiale, Philippe Moireau, and Antoine Tonnoir. Analysis of an observer strategy for initial state reconstruction of wave-like systems in unbounded domains. *AIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2019.

[7] P Joly. *The mathematical model for elastic wave propagation.* Chapman & Hall/CRC New York, 2008.

[8] Philippe Moireau Laurent Bourgeois. *Problèmes inverses dans les systèmes gouvernés par des EDP*. March 2020.

[9] Jacques Louis Lions. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. 1968.

[10] Mihaela Negreanu and Enrique Zuazua. Convergence of a multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(5) :413–418, 2004.

[11] Karim Ramdani, Marius Tucsnak, and George Weiss. Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers. *Automatica*, 46(10) :1616–1625, 2010.

[12] Louis T Tebou and Enrique Zuazua. Uniform boundary stabilization of the finite difference space discretization of the 1- d wave equation. *Advances in Computational Mathematics*, 26(1-3) :337, 2007.

[13] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups.* Springer Science & Business Media, 2009.