Dynamiques de neurones et processus de Hawkes avec interaction spatiale sur des graphes aléatoires

Zoé Agathe-Nerine, E. Luçon, E. Saada
Université de Paris

Email : zoe.agathe-nerine@u-paris.fr

Mots Clés : multivariate Hawkes processes, coupling, spatially interacting particle systems, random graphs, graph convergence

Biographie – J'ai suivi la formation mathématique de l'ENS Paris Saclay qui finance ma thèse, et le master Mathématiques pour les Sciences du Vivant de l'Université Paris Saclay. Ma thèse, débutée en septembre 2020, a pour but d'étudier des processus ponctuels en interaction, en lien avec des applications en neurosciences.

Resumé :

Les neurones, constituants élémentaires du système nerveux, sont des cellules spécialisées dans la réception, l'intégration et la transmission d'information. Un neurone reçoit de l'information (par le biais d'autres neurones par exemple), et si celle ci est suffisante le neurone s'excite : il produit un potentiel d'action, aussi appelé spike. Cette excitation est un phénomène typique et bref dans le temps, qui va en retour influencer la dynamique des autres neurones avec qui il interagit.

Nous présentons un modèle de l'activité neuronale de N neurones en interaction, dans le but de l'étudier lorsque $N \to \infty$. Comme les potentiels d'actions sont brefs et stéréotypés, l'information est uniquement codée dans les temps inter spikes, et chaque neurone est modélisé par un processus ponctuel représentant ses instants d'excitation. Pour modéliser les intants de saut, nous utilisons la notion d'intensité d'un processus de saut : l'apparition d'un spike est vu comme un phénomène aléatoire qui dépend de l'état du neurone. Il aura tendance à émettre un spike selon une certaine intensité liée à l'activité passée du système. On s'intéresse ainsi à un processus de Hawkes multivarié. Pour modéliser l'interaction du système, nous associons à chaque neurone une position dans l'espace, et créons un graphe aléatoire dont la probabilité de présence d'un lien entre deux neurones dépend de leurs positions respectives à travers un noyau W_N.

Formellement, pour modéliser un système de N neurones en interaction, nous considérons que le $i$ème neurone est situé en une position $x_i^{(N)} \in I \subset \mathbb{R}^d$ et que son comportement est caractérisé par le processus de comptage $\left(Z_i^{(N)}(t)\right)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire que $Z_i^{(N)}(t)$ compte le nombre de sauts du $i$ème neurone pendant l'intervalle $[0,t]$. Ces sauts arrivent selon une intensité stochastique $\lambda_i^{(N)}(t)$ qui dépend de l'activité passée de l'ensemble du système :

$$\lambda_i^{(N)}(t) = f\left(u_0(t,x_i) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N w_{ij}^{(N)} \int_0^{t-} h(t-s)dZ_j^{(N)}(s)\right), \tag{1}$$

dans le sens où

$$\mathbf{P}\left(Z_i^{(N)} \text{ saute une fois dans }]t,t+dt] | \mathcal{F}_t\right) = \lambda_i^{(N)}(t)dt,$$

avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ représentant l'interaction synaptique, $u_0 : \mathbb{R}_+ \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ l'activité propre du neurone, $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de mémoire (comment un saut passé continue d'influencer l'intensité actuelle) et $w_{ij}^{(N)}$ représentant l'influence du $j$ème neurone sur le $i$ème. Cette interaction dépend de la réalisation d'un graphe aléatoire, avec $w_{ij}^{(N)} = \kappa_i^{(N)}\xi_{ij}^{(N)}$ où $\xi_{ij}^{(N)}$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $W_N(x_i,x_j)$ et $\kappa_i^{(N)}$ est un paramètre de dilution.

Ce processus de Hawkes multivarié $\left(Z_1^{(N)}(t), \cdots, Z_N^{(N)}(t)\right)_{t\geq 0}$ est une extension du modèle présenté dans [1], et la structure du graphe sous-jacent reprend le travail de [3].

Nous étudions le comportement en grande population de ce processus sur $[0,T]$. Sous réserve que la mesure empirique $\nu^{(N)}$ des positions $\left(x_1^{(N)}, \cdots, x_N^{(N)}\right)$ converge vers ν loi sur I et que le graphe d'interaction converge au sens des graphons vers $W : I \times I \to \mathbf{R}_+$, nous montrons que ce système peut être approché en grande population par un système de processus de Poisson inhomogènes dépendant de la position x du neurone d'intensité

$$\lambda(t,x) = f\left(u_0(t,x) + \int_I \int_0^{t-} W(x,y)h(t-s)\lambda(s,y)ds\nu(dy)\right). \tag{2}$$

En introduisant un couplage adéquat, nous montrons que la mesure empirique du processus $\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\left(Z_i^{(N)}([0,T]),x_i^{(N)}\right)}$ converge vers une mesure limite $\mu_\infty(d\eta, dx) := P_{[0,T],\infty}(d\eta|x)\,\nu(dx)$ où $P_{[0,T],\infty}(\cdot|x)$ est la loi d'un processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda(\cdot,x)$.

Enfin, nous étudions le comportement en temps long de la solution de l'équation (2) dans le cadre linéaire (avec $f = Id$). Alors, sous réserve que l'activité propre u_0 converge en temps long uniformément en espace vers une fonction $u : I \to \mathbf{R}_+$ et de régularité des paramètres, nous montrons l'existence d'une transition de phase. On introduit l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} T: & L^\infty(I) & \longrightarrow & L^\infty(I) \\ & g & \longmapsto & \left(Tg : x \longmapsto \int_I W(x,y)g(y)\nu(dy)\right), \end{array} \tag{3}$$

de rayon spectral noté $r(T)$. Si $\|h\|_1 r(T) < 1$, nous sommes dans le cas sous critique et on montre que l'intensité limite d'un neurone situé en x en temps long est solution de l'équation

$$\ell(x) = u(x) + \|h\|_1 \int_I W(x,y)\ell(y)\nu(dy).$$

Si $\|h\|_1 r(T) > 1$, nous sommes dans le cas sur critique et sous des hypothèses techniques supplémentaires, on montre que $\sup_x \lambda(t,x) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Ces résultats généralisent des comportements connus des processus de Hawkes linéaires homogènes étudiés dans [2].

Références

[1] J. Chevallier, A. Duarte, E. Löcherbach, and G. Ost. Mean field limits for nonlinear spatially extended Hawkes processes with exponential memory kernels. *Stochastic Processes and their Applications*, 129(1):1 – 27, 2019.

[2] Sylvain Delattre, Nicolas Fournier, and Marc Hoffmann. Hawkes processes on large networks. *Ann. Appl. Probab.*, 26(1):216–261, 02 2016.

[3] Eric Luçon. Quenched asymptotics for interacting diffusions on inhomogeneous random graphs. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(11):6783–6842, November 2020.